iv) $(3x-2)^2 > 9$ * Μια πιο έξυπνη λύση

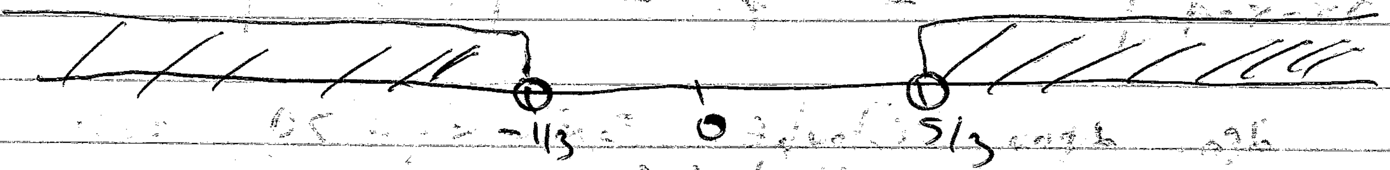
$\sqrt{(3x-2)^2} > \sqrt{9} \Rightarrow |3x-2| > 3$ άρα

$3x-2>3$ ή $3x-2<-3$

$3x>5 \Rightarrow$ ή $3x<-1 \Rightarrow$

$x>5/3$ ή $x<-1/3$

$x\in(5/3,+\infty)$ ή $x\in(-\infty,-1/3)$



v) $x^2-6x+9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)^2 \geq 0$

που ισχύει για κάθε ($\forall$) $x\in\mathbb{R}$, αφού

το $(x-3)^2\geq 0$ πάντα.

Λύση όμως $=0$, όταν $x-3=0 \Rightarrow x=3$

vi) $x^2-5|x|+6>0 \Rightarrow |x|^2-5|x|+6>0$ (1)

θέτουμε $|x|=y\geq 0$, άρα $y^2-5y+6>0$

λύνουμε: $\Delta=25-4\cdot 6=25-24=1$

$y_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}$, $y_1=\frac{6}{2}=3$, $y_2=\frac{4}{2}=2$

y	0		2		3		$+\infty$
y^2-5y+6		+	0	−	0	+	

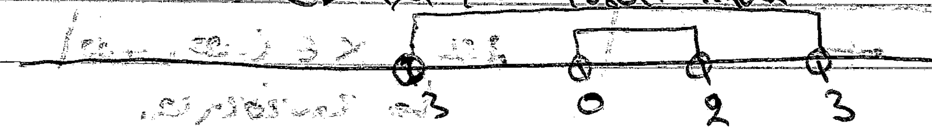
(1) άρα $0<y<2$ ή $3<y$ $\quad |x|=y$

$0<|x|<2$ ή $3<|x| \Rightarrow |x|>3$

$|x|<2 \Rightarrow$ $\quad$ $x>3$ ή $x<-3$

$0<x<2$ και

$|x|>0$ ισχύει πάντα



viii) $(2x-1)^2 - 3|2x-1| + 2 < 0 \Rightarrow$

$|2x-1|^2 - 3|2x-1| + 2 < 0$ (1)

Θέτουμε $|2x-1| = y \geq 0$, άρα έχουμε

$y^2 - 3y + 2 < 0$

Λύνουμε: $\Delta = 9 - 4\cdot 2 = 9-8 = 1$

$y_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$, $y_1 = \frac{4}{2} = 2$, $y_2 = 2/2 = 1$

y	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
y^2-3y+2			+	0	−	0	+	

άρα $1 < y < 2 \Rightarrow 1 < |2x-1| < 2$

Από εδώ προκύπτουν δύο άλλες ανισώσεις

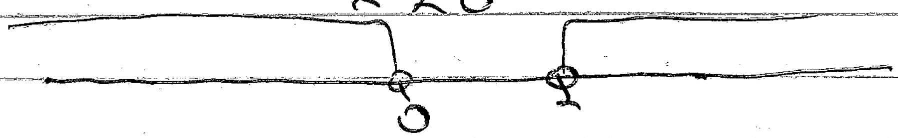
η (1) $|2x-1| > 1$ και (2) $|2x-1| < 2$. Λύνουμε (1)

$2x-1 > 1$ ή $2x-1 < -1 \Rightarrow$

$2x > 2 \Rightarrow$ ή $2x < 0 \Rightarrow$

$x > 1$ $x < 0$

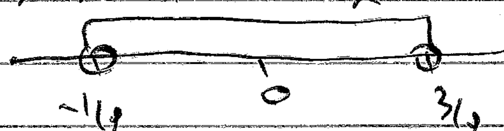
Άρα



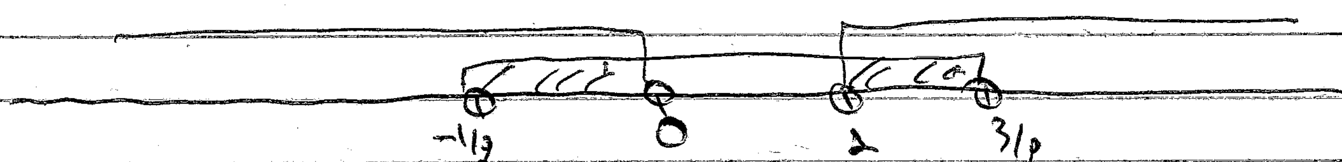
Λύνουμε και τη (2) [illegible]

$|2x-1| < 2 \Rightarrow -2 < 2x-1 < 2 \Rightarrow -1 < 2x < 3 \Rightarrow$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$



Τις βάζουμε και τις δύο στον ίδιο άξονα



Άρα $x \in (-1/2, 0) \cup (1, 3/2)$

Δύσκολη αλλά πολύ καλή άσκηση!!!!

Λύσεις των ασκήσεων.

1 i) $5x^2 > x+4 \Rightarrow 5x^2 - x - 4 > 0$ ①

λύνουμε $\Delta = 1 - 4\cdot 5(-4) = 1 + 80 = 81$

άρα $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 9}{10}$ ⟨ $x_1 = \frac{10}{10} = 1$, $x_2 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου

x	$-\infty$		$-4/5$		1		$+\infty$
$5x^2-x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα αφού θέλουμε $5x^2 - x - 4 > 0$ τότε
$x \in (-\infty, -4/5) \cup (1, +\infty)$

ii) $x(1-2x) \geq -1 \Rightarrow x - 2x^2 \geq -1 \Rightarrow$
$-2x^2 + x + 1 \geq 0 \overset{(-1)}{\Rightarrow} 2x^2 - x - 1 \leq 0$ ①

λύνουμε $\Delta = 1 - 4\cdot 2(-1) = 1 + 8 = 9$

άρα $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$ ⟨ $x_1 = 1$, $x_2 = -2/4 = -1/2$

οπότε

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

κ αφού θέλουμε $2x^2 - x - 1 \leq 0$, τότε $x \in [-1/2, 1]$

iii) $(x-1)^2 > x - 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > x - 4 \Rightarrow$
$x^2 - 2x - x + 1 + 4 > 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 5 > 0$ ①

λύνουμε $\Delta = 9 - 4\cdot 5 = 9 - 20 = -11 < 0$

άρα αφού $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$. Δηλαδή:

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-3x+5		$+$	

άρα $x \in (-\infty, +\infty)$
ή ταυτότητα.