

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3

Το ύψος σε μέτρα ενός τηλεκατευθυνόμενου αεροπλάνου μετά από t sec πτήσης δίνεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -3t^2 + 30t, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα της ανόδου του αεροπλάνου από τη στιγμή της απογείωσής του μέχρι το μέγιστο ύψος καθώς και το χρονικό διάστημα της καθόδου από το μέγιστο ύψος μέχρι την προσγείωσή του.

Μονάδες 10

Δ3. Σε ποια χρονική στιγμή το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος στο οποίο έφτασε το αεροπλάνο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 12

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=2$ να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 3

Δ3. Για $\alpha=2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$$

Γ1. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1}$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x + 16$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^4 + \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α (μον. 6) και β (μον. 2) αν

$$f(0) = 2019 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha = 4$ και $\beta = 2019$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.

Μονάδες 12

Δ3. Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 8

Η αξία μιας μοτοσυκλέτας t χρόνια μετά την αγορά της δίνεται από τη συνάρτηση: $f(t) = 8000 - 50t^2$ (σε €) με $0 \leq t \leq 10$.

Δ1. Ποια είναι η αρχική αξία της μοτοσυκλέτας και ποια θα είναι η αξία της μετά από τρία (3) χρόνια.

Μονάδες 6

Δ2. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της μοτοσυκλέτας οποιαδήποτε χρονική στιγμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της μετά από πέντε (5) χρόνια.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η αξία της μοτοσυκλέτας συνεχώς μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 9

Η ημερήσια είσπραξη (σε €) μίας μονάδας παραγωγής χάλυβα από την πώληση x τόνων χάλυβα δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = 250x, \quad 0 \leq x \leq 20,$$

ενώ το συνολικό κόστος παραγωγής αυτής της ποσότητας δίνεται από τη συνάρτηση

$$K(x) = 10x^2 - 50x + 500$$

Δ1. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση του κέρδους είναι:

$$P(x) = -10x^2 + 300x - 500$$

Μονάδες 6

Δ2. Να βρεθεί το κέρδος της μονάδας παραγωγής από την πώληση 10 τόνων χάλυβα.

Μονάδες 5

Δ3. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους;

Μονάδες 3

Δ4. Πόση ποσότητα χάλυβα πρέπει να πουληθεί, ώστε το κέρδος της μονάδας παραγωγής να γίνει μέγιστο;

Μονάδες 7

Δ5. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος της μονάδας παραγωγής.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 11

Ένας κήπος, σχήματος ορθογωνίου, με διαστάσεις x και y έχει εμβαδό 100 m^2 .

Δ1. Με δεδομένο ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E = x \cdot y$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του κήπου δίνεται από τη συνάρτηση: $\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}$, $0 < x < 100$.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε ο κήπος να έχει ελάχιστη περίμετρο, την οποία και να υπολογίσετε.

Μονάδες 12

Δ3. Για την τιμή του x , που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το κόστος της περιφράξης του κήπου, αν η περιφράξη στοιχίζει 10 € ανά μέτρο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(x+\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$.

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha=-5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρεθεί το κ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 5)$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $\kappa=3$, να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

Δ3. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1-x}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x + 5, \quad \text{όπου } \alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 6

Δ2. Αν $\alpha = -4$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Δ3. Αν $\alpha = -4$, να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+ax^2-9x+\beta$, όπου a,β πραγματικοί αριθμοί.

Γ1. Αν η εφαπτομένη στο σημείο $M(2,5)$ της γραφικής παράστασης της f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 15, να αποδείξετε ότι $a=\beta=3$.

Μονάδες 10

Γ2. Για $a=\beta=3$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)+9}{x^2-4}$$

Μονάδες 5

Γ3. Για $a=\beta=3$, να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)=f'(x)+10$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+\beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β .

Μονάδες 8

Δ2. Για $a=6$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $a=6$ και $\beta=1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6